A Gravitáció-modell alkalmazása a térséggazdaságtanban

(K. Schöler: Raumwirtschaftstheorie c. könyv alapján)

Szolgáltató intézmények esetén a telephely-választásnál eltérést mutatkozik a termelők telephely-választásához képest:

a) mivel a szolgáltatás a termelők és fogyasztók együttes tevékenységét igényli, ezért a szállítási költségeket nem csak egy szereplő viseli;
b) a termelő csak annyi szolgáltatást tud nyújtani, mint amennyire kereslet van;

Jelöljük a szolgáltatást nyújtó helyet j-vel, amelyet valamely i-vel jelölt helyen lévő fogyasztó szeretné igénybe venni. A két hely közötti távolság d_{ij}, amelynek megtétele bizonyos költségeket implikál – a távolság növekedésével tehát csökken a szolgáltatás iránti igény. A másik oldalon a j helyen lévő, a szolgáltatást nyújtó intézménynek r_j reputációja van, a (potenciális) fogyasztók ezt valamilyen módon értékelik – a reputáció növekedésével nő a szolgáltatás iránti igény.

Képezzük a $g(r_j; d_{ij})$ függvényt, ahol $\frac{\partial g}{\partial r_j} > 0$ és $\frac{\partial g}{\partial d_{ij}} < 0$.

Értelmezés:

- kereslet, amely az i-vel jelölt helyen a j helyen nyújtott szolgáltatás iránt létezik; vagy:
- hatás, amelyet a j helyen lévő, a szolgáltatást nyújtó intézmény az i-vel jelölt helyen lévő fogyasztóra gyakorol;

Természetesen az i helyen is létezhetnek intézmények, amelyet képesek ugyanazt a szolgáltatást nyújtani, ezek reputációja r_i. Ha most a $g(r_j; d_{ij})$ függvényt r_i-vel kiegészítjük, akkor az $r_i g(r_j; d_{ij})$ kifejezéssel olyan összefüggést kapunk, amely kapcsolatot tükröz vissza a következő tényezők között: a két hely reputációja és a köztük lévő távolság. Ezt az $R_{ij}(r_j, d_{ij}, r_i) = r_i g(r_j; d_{ij})$-vel jelölt összefüggést úgy lehet értelmezni, hogy ez a két hely közötti „kapcsolatfelvételek" számát (pl. látogatások számát, vásárlások számát, telefonbeszélgetések számát, stb.) tükrözi vissza.

Az $R_{ij}(r_j, d_{ij}, r_i)$ összefüggést általában egy Cobb-Douglas-típusú függvénnyel adják meg, azaz

$$R_{ij}(r_j, d_{ij}, r_i) = c r_i^{\alpha} r_j^{\beta} d_{ij}^{-\gamma}, \text{ ahol } \alpha, \beta, \gamma, c > 0. \tag{1}$$

Látható, hogy ebben az esetben $g(r_j; d_{ij}) = c r_j^{\frac{\beta}{\alpha}} d_{ij}^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, vagyis a fenti tulajdonságok teljesülnek.

A Newton-féle gravitáció-elmélet analógiájára többnyire azt tételezik fel, hogy $\alpha = \beta = 1$. Ezzel adódik $R_{ij}(r_j, d_{ij}, r_i) = c r_i r_j d_{ij}^{-\gamma}$.

A fenti helyzetet most összefoglalóan úgy értelmezhetjük, hogy az i-edik helyen lévő fogyasztó a j-edik helyen nyújtott szolgáltatást kívánja igénybe venni, amihez a d_{ij} távolságot kell megtennie. Mivel a szóban forgó szolgáltatást az i-edik helyen is igénybe vehetné, de mégis vállalja a d_{ij} távolság megtételét, minden bizonnyal a j-edik helyen lévő szolgáltató intézmény reputációja (r_j) nagyobb, mint az i-edik hely szolgáltatójának reputációja (r_i). Abból, hogy a fogyasztó a szolgáltatást igénybe veszi, haszna származik, a haszon nyilván nő, ha a szolgáltatást nyújtó intézmény reputációja nő és ha ezt egyre többször igénybe veszi. A hasznossági függvénye tehát

$$U_{ij} = u(R_{ij}; r_j), \text{ ahol } \frac{\partial u}{\partial R_{ij}} > 0 \text{ és } \frac{\partial u}{\partial r_j} > 0 . \tag{2}$$

Egy újabb index elkerülendő értelmezzük a fenti összefüggéseket nem egyéni fogyasztókra, hanem kollektív fogyasztókra – pl. az i-edik hely lakosságára – és tegyük fel, hogy összesen m db olyan hely létezik, ahol a szolgáltatást igénybe vehetik, azaz $j = 1, 2, ..., m$. Ha az összes szolgáltató helyet figyelembe vesszük, akkor az i-edik hely lakosságának haszna

$$U_i = \sum_{j=1}^{m} U_{ij} = \sum_{j=1}^{m} u(R_{ij}; r_j). \tag{3}$$

Az utazások finanszírozásához az i-edik helyen összesen az M_i pénzösszeg áll a rendelkezésre. Az utazási költségek függnek attól, hogy

a) hányszor teszik meg az utat, azaz R_{ij}-től,
b) mekkora a távolság, azaz d_{ij}-től,
c) mekkora a költség km-enként; ezt jelöljük t-vel.

Más szóval: Ha az i-edik helyen élő lakosság R_{ij}-szer a tőle d_{ij} távolságban lévő j-edik helyre utazik és kilométerenként t pénzegységet fizet, akkor ennek költsége nyilván $R_{ij} t d_{ij}$. Tekintettel arra, hogy nem csak egy szolgáltató hely létezik, hanem m db, ezért a szóban forgó szolgáltatás igénybevételével kapcsolatos utazási összköltség $\sum_{j=1}^{m} R_{ij} t d_{ij}$. Az i-edik hely lakosságára vonatkozó költségvetési korlát ezért

$$M_i = \sum_{j=1}^{m} R_{ij} t d_{ij} .$$

Így döntésüket úgy hozzák meg, hogy maximalizálják az U_i hasznosságot az előzőekben levezetett költségvetési korlát mellett. A Lagrange-függvény

$$L(R_{ij}; \lambda) = \sum_{j=1}^{m} u(R_{ij}; r_j) + \lambda \left[M_i - \sum_{j=1}^{m} R_{ij} t d_{ij} \right]. \tag{4}$$

Az optimumfeltételek

$$\frac{\partial L}{\partial R_{ij}} = \frac{\partial u}{\partial R_{ij}} - \lambda t d_{ij} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., m, \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M_i - \sum_{j=1}^{m} R_{ij} t d_{ij} = 0. \tag{6}$$

A hasznossági függvény ismeretében ebből meghatározható az m db R_{ij}.

Ha $m = 2$ és az $U_{ij} = u(R_{ij}; r_j)$ hasznossági függvény Cobb-Douglas-típusú, azaz $U_{ij} = u(R_{ij}; r_j) = R_{ij}^{\nu} r_j^{\mu}$, akkor $U_i = R_{i1}^{\nu} r_1^{\mu} + R_{i2}^{\nu} r_2^{\mu}$. Ezzel az optimumfeltételek

$$\frac{\partial L}{\partial R_{i1}} = \nu R_{i1}^{\nu-1} r_1^{\mu} - \lambda t d_{i1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_{i2}} = \nu R_{i2}^{\nu-1} r_2^{\mu} - \lambda t d_{i2} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M_i - R_{i1} t d_{i1} - R_{i2} t d_{i2} = 0.$$

Az első két feltételből azt kapjuk, hogy

$$\frac{d_{i1}}{d_{i2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\mu} \left(\frac{R_{i1}}{R_{i2}}\right)^{\nu-1}, \tag{7}$$

illetve

$$R_{i2} = R_{i1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{\mu}{\nu-1}} \left(\frac{d_{i2}}{d_{i1}}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}.$$

Ezt a harmadik optimumfeltételbe behelyettesítve meghatározható R_{i1}:

$$R_{i1} = \frac{M_i}{t \cdot \left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{\mu}{\nu-1}} \left(\frac{d_{i2}}{d_{i1}}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} d_{i2} + d_{i1} \right]}, \tag{8}$$

s ezzel

$$R_{i2} = \frac{M_i \left(\frac{d_{i2}}{d_{i1}}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{\mu}{\nu-1}}}{t \cdot \left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{\mu}{\nu-1}} \left(\frac{d_{i2}}{d_{i1}}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} d_{i2} + d_{i1}\right]}. \tag{9}$$

Az R_{ij}, $j = 1, 2, ..., m$, értékek birtokában további elemzések lehetségesek:

a) Meghatározható, hogy egy adott szolgáltatóegységnek mekkora a hatóköre. A köztük lévő határ úgy definiálható, hogy $R_{ij} = R_{ik}$, $j, k = 1, 2, ..., m$, azaz $j = 1, 2$ esetén $R_{i1} = R_{i2}$. Ezzel (7)-ből azt kapjuk, hogy

$$\frac{d_{i1}}{d_{i2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\mu}.$$

Mivel a fogyasztó szempontjából ebben az esetben $d_{i1} + d_{i2} = D$, ezért azt kapjuk, hogy

$$d_{i1} = \frac{D\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\mu}}{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\mu}},$$

valamint

$$d_{i2} = \frac{D}{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\mu}}.$$